Université Paris Dauphine
2025-2026

Introduction aux séries temporelles
TD6 - Estimation

Méthode delta. Si (T_n) est une suite de variables aléatoires réelles telle que $\sqrt{n}(T_n-\theta)$ converge en loi vers $\mathcal{N}(0,\sigma^2)$ quand $n\to\infty$ et si $g\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ est dérivable avec $g'(\theta)\neq 0$, alors $\sqrt{n}(g(T_n)-g(\theta))$ converge en loi vers $\mathcal{N}(0,\sigma^2 g'(\theta))$ quand $n\to\infty$.

Autocorrélation empirique et formule de Bartlett. Voir le chapitre 6 dans le polycopié de D. Chafai et C. Lévy-Leduc.

Exercice 1 (Estimation d'un AR(1)) Soit (X_t) un processus AR de la forme $X_t=\phi X_{t-1}+Z_t$ où (Z_t) est un bruit blanc très fort, centré, et possédant un moment d'ordre 4. On suppose que $|\phi|<1$.

1. Montrer que $\phi=\gamma_X(1)/\gamma_X(0)$.
2. En déduire un estimateur naturel pour ϕ et donner son comportement asymptotique.

Exercice 2 (Estimation d'un MA(1)) Soit (X_t) un processus MA de la forme $X_t=\theta Z_{t-1}+Z_t$ où (Z_t) est un bruit blanc très fort, centré, et possédant un moment d'ordre 4. On suppose que $|\theta|<1$ et on cherche à l'estimer.

1. Montrer que θ s'exprime en fonction du coefficient de corrélation $\rho_X(1)=\gamma_X(1)/\gamma_X(0)$.
2. Donner un estimateur pour $\rho_X(1)$ ainsi que son comportement asymptotique.
3. En déduire un estimateur de θ et donner son comportement asymptotique.

Exercice 3 (Estimation de la moyenne et intervalle de confiance) Soit $Y_t=\theta+X_t$, où (X_t) est un AR(1) défini par $X_t-\phi X_{t-1}=Z_t$, où $|\phi|<1$ et les Z_t sont indépendantes et identiquement distribuées de loi $\mathcal{N}(0,\sigma^2)$. On cherche à estimer θ à partir de $Y_0,Y_1,\ldots,Y_{n-1}$. On note $\widehat{\theta}_n$ la moyenne empirique de $Y_0,Y_1,\ldots,Y_{n-1}$ définie par

$$\widehat{\theta}_n=\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}Y_i.$$

1. Calculer $\lim_{n\to\infty} n\mathrm{var}(\widehat{\theta}_n)$ et donner l'expression de γ défini par
$$\sqrt{n}(\widehat{\theta}_n-\theta)\xrightarrow[n\to\infty]{\text{loi}}\mathcal{N}(0,\gamma).$$
2. On choisit $\phi=0.6$ et $\sigma^2=2$. Lorsqu'on observe $n=100$ valeurs, on obtient $\widehat{\theta}_n=0.271$. Construire un intervalle de confiance asymptotique à 95% pour θ. Peut-on dire que $\theta=0$?
3. On propose un autre estimateur de θ défini par $\widetilde{\theta}_n=(\mathbf{1}_n^\top\gamma_n^{-1}\mathbf{1}_n)^{-1}\mathbf{1}_n^\top\gamma_n^{-1}Y^{(n)}$ où $Y^{(n)}=(Y_0,Y_1,\ldots,Y_{n-1})^\top$, $\mathbf{1}_n=(1,\ldots,1)^\top$ et γ_n est la matrice de covariance de $Y^{(n)}$. Justifier le choix de cet estimateur;
4. Calculer $\lim_{n\to\infty} n\mathrm{var}(\widetilde{\theta}_n)$. Qu'en concluez-vous ?